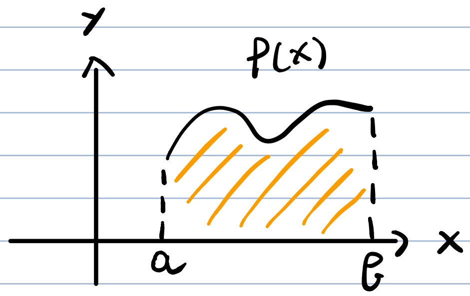
METODO DEI TRAPEZI

Questa tecnica ci permette di APPROSSIMARE il valore di un INTEGRALE DEFINITO



$f(x)$ continua in $[a, b]$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \text{AREA SOTTO LA CURVA}$$

Si procede come segue

1) Si mette l'intervallo $[a, b]$ in 4 piccoli intervalli ciascuno di dim.

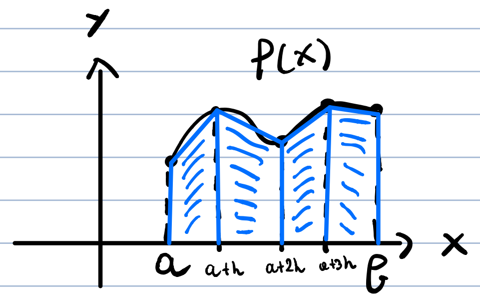
$$h = \frac{b-a}{4}$$

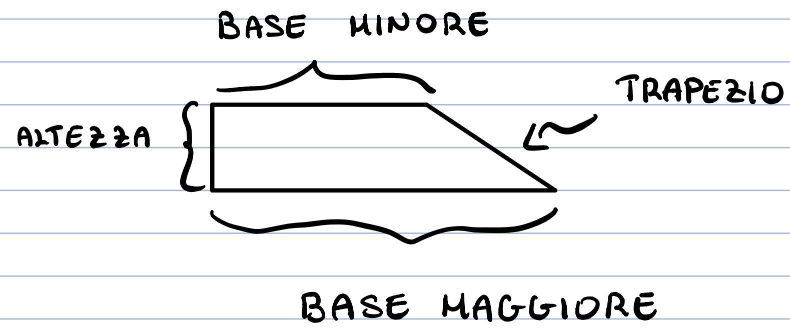
2) Si calcolano i valori

$$f(a),\ f(a+h),\ f(a+2h),$$

$$f(a+3h),\ f(\underbrace{a+4h}_{b}) = f(b)$$

3) Si approssima l'area sotto la retta andando a calcolare l'area dei TRAPEZI ottenuti come segue





L'altezza dei TRAPEZI nel nostro caso è $h = \frac{b-a}{4}$, ed è uguale per tutti, mentre i LATI MAGGIORI e i LATI MINORI dipendono dal valore che f assegna ai vari punti.

Troviamo quindi la seguente APPROSSIMAZIONE

$$\left(f(a) + f(a+h)\right) \cdot \frac{h}{2} +$$

$$\left(f(a+h) + f(a+2h)\right) \cdot \frac{h}{2} +$$

$$\left(f(a+2h) + f(a+3h)\right) \cdot \frac{h}{2} +$$

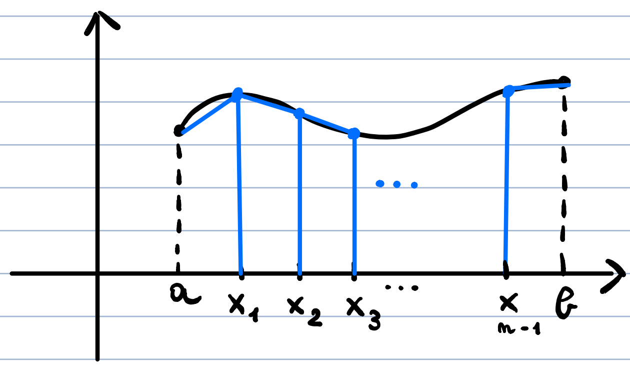
$$\left(f(a+3h) + f(b)\right) \cdot \frac{h}{2}$$

Notando poi che i termini INTERMEDI appaiono due volte trovo la seguente semplificazione

$$\frac{h}{2} \cdot \left(2 \cdot f(a+h) + 2 \cdot f(a+2h) + 2f(a+3h) + f(a) + f(b)\right)$$

$$= h\left(\frac{f(a)}{2} + f(a+h) + f(a+2h) + f(a+3h) + \frac{f(b)}{2}\right)$$

Volendo GENERALIZZARE la formula precedente al caso in cui dividiamo l'intervallo in n parti, troviamo



$$h = \frac{b-a}{n}$$

ALTEZZA DI OGNI TRAPEZIO

La nostra approssimazione è quindi data da

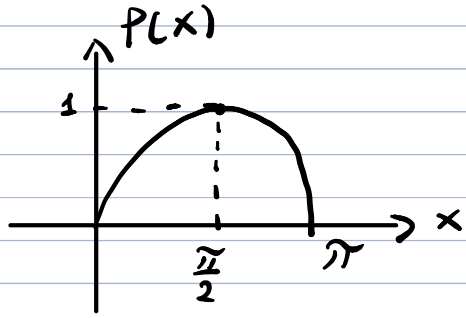
$$h \cdot \left(\frac{f(a)}{2} + \frac{f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f(a + k \cdot h)\right)$$

A seguire qualche esempio...

ESEMPIO:

$f(x) = \sin x$

$[a, b] = [0, \pi]$



Dividendo l'intervallo in 4 parti troviamo la seguente approssimazione

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{\pi - 0}{4} = \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{\pi}{4} \cdot \left(\frac{\sin(0)}{2} + \frac{\sin(\pi)}{2} + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{3}{4}\pi\right) \right)$$

$$= \frac{\pi}{4}\left(0 + 0 + \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$= \frac{\pi}{4}\left(1 + \sqrt{2} \right)$$

$$= 1.89611\ldots$$

Notiamo che il valore CORRETTO dell'area è dato dal seguente integrale definito

$$\int_0^{\pi} \sin(x)\, dx = -\cos(x)\Big|_0^{\pi}$$

$$= -\cos(\pi) + \cos(0)$$

$$= 1 + 1$$

$$= 2$$

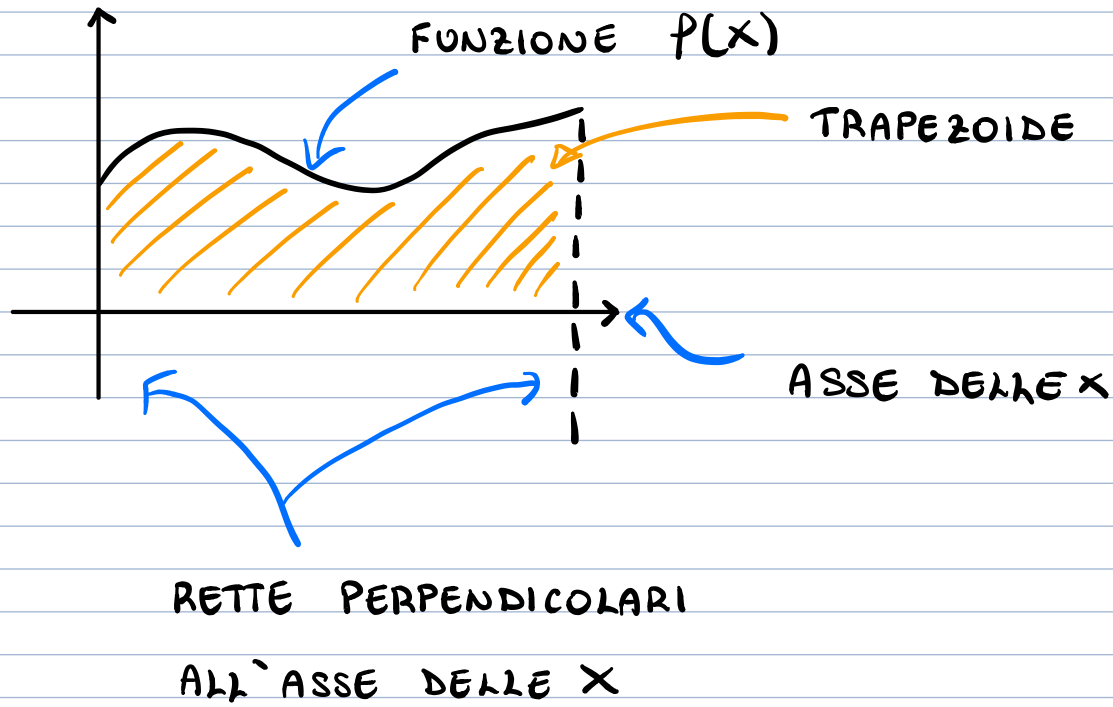
METODO DELLE PARABOLE

L'idea è quella di approssimare il GRAFICO della funzione con ARCHI DI PARABOLA opportunamente scelti.

Ciascun arco è individuato da TRE PUNTI del grafico.

Il valore approssimato dell'integrale si ottiene calcolando la SOMMA delle AREE dei TRAPEZOIDI delimitati da tali archi.

Un TRAPEZOIDE è la parte di piano sottesa dal grafico di una funzione e compresa tra la funzione, l'asse x, e le due rette PERPENDICOLARI all'asse delle x.



Il metodo delle parabole si basa sul seguente teorema, che ci dice come calcolare l'area di un TRAPEZOIDE delimitato da una PARABOLA.

$\downarrow$

TEOREMA

Dati tre punti (x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2) che definiscono una PARABOLA e tali che

$$x_1 = \frac{x_0 + x_2}{2}$$

l'area del TRAPEZOIDE delimitato dalla parabola è dato da

$$S = \frac{h}{3} \cdot (y_0 + 4 \cdot y_1 + y_2)$$

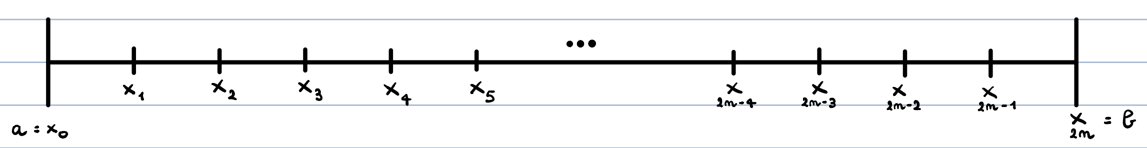
dove $h = x_1 - x_0 = x_2 - x_1$.

Il metodo delle parabole può quindi essere descritto nel seguente modo:

1) Si divide l'intervallo $[a, b]$ in $2n$ parti uguali, ciascuna di ampiezza

$$h = \frac{b - a}{2n}$$

I punti sono identificati come segue



2) Per punto $x_0, x_1, \dots, x_{2n}$ ci andiamo a calcolare il valore della funzione f per ottenere

$$f(x_0) = f(a + 0 \cdot h) = f(a)$$
$$f(x_1) = f(a + 1 \cdot h)$$
$$f(x_2) = f(a + 2 \cdot h)$$
$$\vdots$$
$$f(x_{2n-2}) = f(a + (2n-2) \cdot h)$$
$$f(x_{2n-1}) = f(a + (2n-1) \cdot h)$$
$$f(x_{2n}) = f(a + 2n \cdot h) = f(b)$$

3) Per ogni intervallo

$[x_0, x_2], [x_2, x_4], \dots, [x_{2i}, x_{2(i+1)}], \dots [x_{2n-2}, x_{2n}]$

calcoliamo l area dell arco di PARABOLA passante per l intervallo utilizzando la formula del teorema

$$[x_0, x_2] \longrightarrow \frac{h}{3} \cdot (y_0 + 4 \cdot y_1 + y_2)$$

$$[x_2, x_4] \longrightarrow \frac{h}{3} (y_2 + 4 \cdot y_3 + y_4)$$

$$\vdots$$

$$[x_{2n-2}, x_{2n}] \longrightarrow \frac{h}{3} (y_{2n-2} + 4 \cdot y_{2n-1} + y_{2n})$$

4) Sommo tutte le aree tra loro per ottenere l'approssimazione finale

$$\frac{h}{3}(y_0 + 4 \cdot y_1 + y_2) + \frac{h}{3}(y_2 + 4 \cdot y_3 + y_4) +$$

$$+ \dots + \frac{h}{3}(y_{2m-2} + 4 \cdot y_{2m-1} + y_{2m})$$

Tale formula può essere poi SEMPLIFICATA come segue

$$\frac{h}{3}\Big(y_0 + y_{2m} + 4 \cdot (y_1 + y_3 + \dots + y_{2m-1}) +$$

$$+ 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{2m-2})\Big)$$